ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №5

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

5.1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Сформировать у студентов представление о прямых и итерационных методах решения систем линейных уравнений, выработать умения составлять и применять алгоритмы и программы для решения систем уравнений, дать навыки в использовании программных средств для решения систем уравнений.

5.2. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Изучить теоретическую часть. Выполните задания, соответствующие номеру Вашего варианта, и продемонстрируйте их преподавателю.

2. Оформите отчет по лабораторной работе, который должен содержать:

- титульный лист;
- исходные данные варианта;
- решение задачи;
- результаты решения задачи.

5.3. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Пример 5.1.

Найти решение системы методом Гаусса:

$$\begin{cases} 1{,}23x_1 - 3{,}25x_2 - 8{,}69x_3 = 10{,}33, \\ 7{,}03x_1 + 4{,}81x_2 + 0{,}27x_3 = -6{,}43, \\ 4{,}49x_1 - 7{,}55x_2 + 12{,}51x_3 = 41{,}53. \end{cases}$$

Решение:

Создать файл Exchange.m (листинг 5.1), содержащий описание функции, осуществляющей перестановку строк при обнаружении в текущей строке нулевого элемента на главной диагонали.

Листинг 5.1. Файл Exchange.m.

```
function z=Exchange(C,i)
k=i+1;
while C(k,i)==0
    k=k+1;
end;
for j=1:size(C,1)
    s=C(i,j);
    C(i,j)=C(k,j);
    C(k,j)=s;
end;
z=C;
```

2. Создать файл Simplex.m (листинг 5.2), содержащий описание функции, возвращающей расширенную матрицу системы к диагональному виду.

Листинг 5.2. Файл Simplex.m.

```
function z=Simplex(A,b)
N=size(A,1); % Определение числа уравнений системы
C=cat(2,A,b); % Создание расширенной матрицы системы
for i=1:N-1
    if C(i,i)==0
        C=Exchange(C,i);
    end;
    for j=0:N
        C(i,N+1-j)=C(i,N+1-j)/C(i,i);
    end;
    for m=i+1:N
        alpha=C(m,i);
        for j=i:N+1
            C(m,j)=C(m,j)-alpha*C(i,j);
        end;
    end;
end;
C(N,N+1)=C(N,N+1)/C(N,N);
C(N,N)=1;
z=C;
```

3. Создать файл Gauss.m (листинг 5.3), содержащий описание функции, возвращающей решение системы линейных уравнений методом Гаусса.

Листинг 5.3. Файл Gauss.m.

```
function z=Gauss(A,b)
C=Simplex(A,b);
N=size(A,1);
v(N)=C(N,N+1);
for j=1:N-1
    s=0;
    for k=0:j-1
        s=s+C(N-j,N-k)*v(N-k);
    end;
    v(N-j)=(C(N-j,N+1)-s)/C(N-j,N-j);
end;
z=v';
```

4. Задать матрицу системы линейных уравнений:

```
>> A=[1.23,-3.25,-8.69;7.03,4.81,0.27;4.49,-7.55,12.51]

A =

    1.2300   -3.6900   -8.6900
    7.0300    4.8100    0.2700
    4.4900   -7.5500   12.5100
```

5. Задать вектор-столбец свободных членов:

```
>> b=[10.33;-6.43;41.53]

b =

   10.3300
   -6.4300
   41.5300
```

6. Решить систему уравнений, используя функцию `Gauss( )`:

```
>> x=Gauss(A,b)

x =

    1.6468
   -3.7694
    0.4540
```

7. Проверить правильность решения системы линейных уравнений:

```
>> A*x

ans =

   10.3300
   -6.4300
   41.5300
```

Ответ: решением системы методом Гаусса является вектор-столбец $x = \begin{pmatrix} 1,6467 \\ -3,7694 \\ 0,4540 \end{pmatrix}$.

Пример 5.2.

Решить систему линейных алгебраических уравнений методом итерации с точностью 0,001:

$$\begin{cases} 1,23x_1 - 3,25x_2 - 8,69x_3 = 10,33, \\ 7,03x_1 + 4,81x_2 + 0,27x_3 = -6,43, \\ 4,49x_1 - 7,55x_2 + 12,51x_3 = 41,53. \end{cases}$$

Решение:

Для начала преобразуем данную систему к виду пригодному для итерационного процесса:

1. Возьмем первым уравнением второе, третьим - третье, а вторым сумму первого и третьего уравнений:

$$\begin{cases} 7,03x_1 + 4,81x_2 + 0,27x_3 = -6,43, \\ 5,72x_1 - 10,8x_2 + 3,82x_3 = 51,86, \\ 4,49x_1 - 7,55x_2 + 12,51x_3 = 41,53. \end{cases}$$

2. Разделим каждое уравнение на диагональный коэффициент и выразим из каждого уравнения диагональное неизвестное:

$$\begin{cases} x_1 = -0,6842x_2 - 0,0384x_3 - 0,9146, \\ x_2 = 0,5296x_1 + 0,3537x_3 - 4,8018, \\ x_3 = -0,3589x_1 + 0,6035x_2 + 3,3197. \end{cases}$$

3. Создайте файл Iterac.m (листинг 5.4), содержащий описание функции, возвращающей решение системы линейных уравнений методом простой итерации.

Листинг 5.4. Файл Iterac.m.

```
function Iterac(C1,d1,eps)
N=size(C1,1);
R1=d1;
q1=R1;
q2=(C1*q1)+R1;
```

```
p=0;
s=0;
for i=1:N
    if abs(q2(i)-q1(i))>s
        s=abs(q2(i)-q1(i));
    end;
end;
while s>eps
    p=p+1;
    q1=q2;
    q2=(C1*q1)+R1;
    s=0;
    for i=1:N
    if abs(q2(i)-q1(i))>s
        s=abs(q2(i)-q1(i));
    end;
end;
end;
q2
(C1*q2)+R1-q2
p
abs(q2-q1)
```

4. Задайте матрицу системы, приведенной к виду, пригодному для метода простой итерации:

```
>> A=[0,-0.6842,-0.0384;0.5296,0,0.3537;-0.3589,0.6035,0]

A =

         0   -0.6842   -0.0384
    0.5296         0    0.3537
   -0.3589    0.6035         0
```

5. Задайте вектор-столбец свободных членов:

```
>> b=[-0.9146;-4.8018;3.3197]

b =

   -0.9146
   -4.8018
    3.3197
```

6. Найдите решение системы линейных уравнений:

```
>> Iterac(A,b,0.001)

q2 =
    1.6469
   -3.7688
    0.4537

ans =
  1.0e-003 *

   -0.3175
   -0.3475
    0.4688

p =
    11

ans =
   1.0e-003 *
```

```
    0.5043
    0.4768
    0.2273
```

Ответ: решением системы является вектор-столбец $x = \begin{pmatrix} 1,6469 \\ -3,7688 \\ 0,4537 \end{pmatrix}$, полученный на 11 шаге итерации.

Пример 5.3.

Решить систему линейных алгебраических уравнений методом Зейделя с точностью 0,001:

$$\begin{cases} 1,23x_1 - 3,25x_2 - 8,69x_3 = 10,33, \\ 7,03x_1 + 4,81x_2 + 0,27x_3 = -6,43, \\ 4,49x_1 - 7,55x_2 + 12,51x_3 = 41,53. \end{cases}$$

Решение:

1. Создать файл Zeidel.m (листинг 5.5), содержащий описание функции, выполняющей последовательно: а) приведение системы к нормальному виду; б) приведение нормальной системы к виду, пригодному для итерационного процесса Зейделя; в) реализацию итерационного процесса Зейделя.

Листинг 5.5 Файл Zeidel.m.

```
function Zeidel(A,b,eps);
N=size(A,1);
% Приведение системы к нормальному виду
C=A'*A;
D=A'*b;
% Приведение системы к виду, пригодному для итерационного процесса
for i=1:N
    D1(i)=D(i)/C(i,i);
end;
D1=D1'; % Транспонирование матрицы
d1=D1;
for i=1:N
    for j=1:N
        if i==j
            C1(i,j)=0;
        else
            C1(i,j)=-C(i,j)/C(i,i);
        end;
    end;
end;
% Решение СЛАУ методом Зейделя
R1=d1;
q1=R1;
% Создание матрицы для хранения промежуточных данных
t=size(C1);
N=t(1,1);
```

```
q2=zeros(t(1,1),1);
% Цикл вычислений
p=0;
s=0;
for i=1:N
    if abs(q2(i)-q1(i))>s
        s=abs(q2(i)-q1(i));
    end;
end;
while s>eps
    q2=q1;
    p=p+1;
    for f=1:N
       v=(C1*q1)+R1;
       x(f,1)=v(f,1);
       q1(f,1)=x(f,1);
    end;
    s=0;
    for i=1:N
    if abs(q2(i)-q1(i))>s
        s=abs(q2(i)-q1(i));
    end;
end;
    q1=x;
end;
'Ответы:'
q2
'Проверка:'
A*q2
'число проходов:'
p
abs(q2-q1)
```

2. Задать значения коэффициентов при неизвестных исходной системы линейных уравнений и столбец свободных членов:

```
>> A=[1.23,-3.25,-8.69;7.03,4.81,0.27;4.49,-7.55,12.51];
>> b=[10.33;-6.43;41.53];
```

3. Вычислить решение системы линейных уравнений, используя функцию `Zeidel()`:

```
>> Zeidel(A,b,0.001)
ans =
Ответы:
q2 =
    1.6461
   -3.7683
    0.4543
ans =
Проверка:
ans =
   10.3235
   -6.4304
   41.5255
ans =
число проходов:
p =
```

```
      8
ans =
  1.0e-003 *
    0.4400
    0.5685
    0.2488
```

Ответ: решением системы трех линейных уравнений является вектор $x = \begin{pmatrix} 1{,}6461 \\ -3{,}7683 \\ 0{,}4543 \end{pmatrix}$, найденный на восьмом шаге итерации.

Рассмотрим решение систем линейных уравнений с помощью встроенной функции `solve()`:

`solve (' f1',  'f2 ', …,  'fn ', x1, x2, …, xn)`

где:

- ✓ `'fi '` – i-е уравнение системы, i=1, 2, …, n;
- ✓ `xi` – i-е неизвестное, i=1, 2, …, n.

Перед функцией `solve()` необходимо с помощью функции `syms` определить символьные переменные.

Пример 5.4.

Пусть необходимо решить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 1{,}23x_1 - 3{,}25x_2 - 8{,}69x_3 = 10{,}33, \\ 7{,}03x_1 + 4{,}81x_2 + 0{,}27x_3 = -6{,}43, \\ 4{,}49x_1 - 7{,}55x_2 + 12{,}51x_3 = 41{,}53. \end{cases}$$

Программа решения системы уравнений имеет вид:

```
>> syms x1 x2 x3;
>>   Y=solve('1.23*x1-3.25*x2-8.69*x3=10.33',   '7.03*x1+4.81*x2+0.27*x3=-6.43',
'4.49*x1-7.55*x2+12.51*x3=41.53')
```

После нажатия клавиши <Enter> получим ответ в следующем виде:

```
Y =
    x1: [1x1 sym]
    x2: [1x1 sym]
    x3: [1x1 sym]
```

Программа задачу решила, но не выдала значения неизвестных x_1, x_2, x_3. Для их получения необходимо воспользоваться командой `Y.k`, где `k` – имя неизвестного. В нашем случае решение будет иметь вид:

```
>> Y.x1
 ans =
1.6467696870844978837212332256586

>> Y.x2
ans =
-3.7690989344414828576791743237764

>> Y.x3
ans =
.45398138688708304769095896660916
```

5.4. ПРИМЕРНЫЕ ВОПРОСЫ НА ЗАЩИТЕ РАБОТЫ

1. Какие вы знаете группы методов решения систем линейных уравнений?

2. Какие методы относятся к прямым методам решения систем линейных уравнений?
3. Какие методы относятся к приближенным методам решения систем линейных уравнений?
4. Что значит решить систему уравнений?
5. В чем заключается суть метода Гаусса для решения систем линейных уравнений?
6. В чем заключается суть метода Жордана-Гаусса для решения систем линейных уравнений?
7. В чем заключается суть метода простой итерации для решения систем уравнений?
8. Как привести систему к виду с преобладающими диагональными коэффициентами?
9. В чем заключается суть метода Зейделя для решения систем уравнений?

5.5. ЗАДАНИЕ

1. Решить СЛАУ методом Гаусса с точностью 0,001.
2. Решить СЛАУ методом простой итерации с точностью 0,001.
3. Решить СЛАУ методом Зейделя с точностью 0,001.
4. Провести сравнительную характеристику методов.
5. Решить СЛАУ в системе MATLAB с помощью встроенной функции.

Варианты заданий.

№ варианта	Задание
1	$\begin{cases} 4,4x_1 - 2,5x_2 + 19,2x_3 - 10,8x_4 = 4,3, \\ 5,5x_1 - 9,3x_2 - 14,2x_3 + 13,2x_4 = 6,8, \\ 7,1x_1 - 11,5x_2 + 5,3x_3 - 6,7x_4 = -1,8, \\ 14,2x_1 + 23,4x_2 - 8,8x_3 + 5,3x_4 = 7,2. \end{cases}$
2	$\begin{cases} 8,2x_1 - 3,2x_2 + 14,2x_3 + 14,8x_4 = -8,4, \\ 5,6x_1 - 12x_2 + 15x_3 - 6,4x_4 = 4,5, \\ 5,7x_1 + 3,6x_2 - 12,4x_3 - 2,3x_4 = 3,3, \\ 6,8x_1 + 13,2x_2 - 6,3x_3 - 8,7x_4 = 14,3. \end{cases}$
3	$\begin{cases} 5,7x_1 - 7,8x_2 - 5,6x_3 - 8,3x_4 = 2,7, \\ 6,6x_1 + 13,1x_2 - 6,3x_3 + 4,3x_4 = -5,5, \\ 14,7x_1 - 2,8x_2 + 5,6x_3 - 12,1x_4 = 8,6, \\ 8,5x_1 + 12,7x_2 - 23,7x_3 + 5,7x_4 = 14,7. \end{cases}$

4	$\begin{cases} 3{,}8x_1 + 14{,}2x_2 + 6{,}3x_3 - 15{,}5x_4 = 2{,}8, \\ 8{,}3x_1 - 6{,}6x_2 + 5{,}8x_3 + 12{,}2x_4 = -4{,}7, \\ 6{,}4x_1 - 8{,}5x_2 - 4{,}3x_3 + 8{,}8x_4 = 7{,}7, \\ 17{,}1x_1 - 8{,}3x_2 + 14{,}4x_3 - 7{,}2x_4 = 13{,}5. \end{cases}$
5	$\begin{cases} 15{,}7x_1 + 6{,}6x_2 - 5{,}7x_3 + 11{,}5x_4 = -2{,}4, \\ 8{,}8x_1 - 6{,}7x_2 + 5{,}5x_3 - 4{,}5x_4 = 5{,}6, \\ 6{,}3x_1 - 5{,}7x_2 - 23{,}4x_3 + 6{,}6x_4 = 7{,}7, \\ 14{,}3x_1 + 8{,}7x_2 - 15{,}7x_3 - 5{,}8x_4 = 23{,}4. \end{cases}$
6	$\begin{cases} 4{,}3x_1 - 12{,}1x_2 + 23{,}2x_3 - 14{,}1x_4 = 15{,}5, \\ 2{,}4x_1 - 4{,}4x_2 + 3{,}5x_3 + 5{,}5x_4 = 2{,}5, \\ 5{,}4x_1 + 8{,}3x_2 - 7{,}4x_3 - 12{,}7x_4 = 8{,}6, \\ 6{,}3x_1 - 7{,}6x_2 + 1{,}34x_3 + 3{,}7x_4 = 12{,}1. \end{cases}$
7	$\begin{cases} 14{,}4x_1 - 5{,}3x_2 + 14{,}3x_3 - 12{,}7x_4 = -14{,}4, \\ 23{,}4x_1 - 14{,}2x_2 - 5{,}4x_3 + 2{,}1x_4 = 6{,}6, \\ 6{,}3x_1 - 13{,}2x_2 - 6{,}5x_3 + 14{,}3x_4 = 9{,}4, \\ 5{,}6x_1 + 8{,}8x_2 - 6{,}7x_3 - 23{,}8x_4 = 7{,}3. \end{cases}$
8	$\begin{cases} 1{,}7x_1 + 10x_2 - 1{,}3x_3 + 2{,}1x_4 = 3{,}1, \\ 3{,}1x_1 + 1{,}7x_2 - 2{,}1x_3 + 5{,}4x_4 = 2{,}1, \\ 3{,}3x_1 - 7{,}7x_2 + 4{,}4x_3 - 5{,}1x_4 = 1{,}9, \\ 10x_1 - 20{,}1x_2 + 20{,}4x_3 + 1{,}7x_4 = 1{,}8. \end{cases}$
9	$\begin{cases} 1{,}7x_1 - 1{,}8x_2 + 1{,}9x_3 - 57{,}4x_4 = 10, \\ 1{,}1x_1 - 4{,}3x_2 + 1{,}5x_3 - 1{,}7x_4 = 19, \\ 1{,}2x_1 + 1{,}4x_2 + 1{,}6x_3 + 1{,}8x_4 = 20, \\ 7{,}1x_1 - 1{,}3x_2 - 4{,}1x_3 + 5{,}2x_4 = 10. \end{cases}$
10	$\begin{cases} 6{,}1x_1 + 6{,}2x_2 - 6{,}3x_3 + 6{,}4x_4 = 6{,}5, \\ 1{,}1x_1 - 1{,}5x_2 + 2{,}2x_3 - 3{,}8x_4 = 4{,}2, \\ 5{,}1x_1 - 5{,}0x_2 + 4{,}9x_3 - 4{,}8x_4 = 4{,}7, \\ 1{,}8x_1 + 1{,}9x_2 + 2{,}0x_3 - 2{,}1x_4 = 2{,}2. \end{cases}$
11	$\begin{cases} 2{,}2x_1 - 3{,}1x_2 + 4{,}2x_3 - 5{,}1x_4 = 6{,}01, \\ 1{,}3x_1 + 2{,}2x_2 - 1{,}4x_3 + 1{,}5x_4 = 10, \\ 6{,}2x_1 - 7{,}4x_2 + 8{,}5x_3 - 9{,}6x_4 = 1{,}1, \\ 1{,}2x_1 + 1{,}3x_2 + 1{,}4x_3 + 4{,}5x_4 = 1{,}6. \end{cases}$

12	$\begin{cases} 35{,}8x_1 + 2{,}1x_2 - 34{,}5x_3 - 11{,}8x_4 = 0{,}5, \\ 27{,}1x_1 - 7{,}5x_2 + 11{,}7x_3 - 23{,}5x_4 = 12{,}8, \\ 11{,}7x_1 + 1{,}8x_2 - 6{,}5x_3 + 7{,}1x_4 = 1{,}7, \\ 6{,}3x_1 + 10x_2 + 7{,}1x_3 + 3{,}4x_4 = 20{,}8. \end{cases}$